

UNED

UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA

Nivelación de Contenidos Matemáticos

Conjuntos Numéricos

1

MÓDULO

Autor: José Pablo Chaves Vásquez
Especialistas de contenido: Allan Gen Palma,
Emmanuel Chaves Villalobos
Gloriana Gómez Garita
Año: 2024

Material didáctico
Proyecto Nivelación de Contenidos
Matemáticos

Carrera de Enseñanza de la Matemática

Licencia Creative Commons Reconocimiento - No Comercial 3.0 Unported Licence (la “Licencia”). Usted puede utilizar este archivo de conformidad con la Licencia. Usted puede obtener una copia de la Licencia en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. A menos que lo requiera la ley aplicable o se acuerde por escrito, el software distribuido bajo la Licencia se distribuye “tal y como está”, sin garantías ni condiciones de ningún tipo, ya sea expresa o implícita.

Índice general

1	Conjuntos numéricos	5
1.1	Definición de conjunto	6
1.2	Conjuntos numéricos	7
1.3	Pertenencia o no pertenencia de un elemento a un conjunto	9
1.4	Subconjuntos y no subconjuntos de un conjunto	9
2	Recta Real	11
2.1	Representar números en la recta real	12
2.2	Intervalos	15
3	Relaciones de orden en \mathbb{R}	17
3.1	Noción de orden en \mathbb{R}	18
3.2	Los símbolos $\leq, <, \geq, >$	18
4	Valor absoluto	20
4.1	Valor absoluto	21
5	Operaciones con números irracionales	23
5.1	Leyes de potencias	24
5.2	Suma y resta de números irracionales	24

5.3	Multiplicación y división de números irracionales	26
5.4	Operaciones combinadas de números irracionales	27
6	Racionalización de radicales	30
6.1	Racionalización del numerador	31
6.2	Racionalización del denominador	31
7	Soluciones de los ejercicios	33
	Bibliografía	37

1 — Conjuntos numéricos

Este capítulo realiza un recorrido por los **conjuntos numéricos**: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{I} y \mathbb{R} .

Sin brindar una construcción matemática de ellos, ni profundizando en el análisis de estructuras algebraicas determinadas por ciertas operaciones definidas en ellos, se brindará una descripción de manera general, para poder identificar los elementos que los componen y así diferenciar los distintos conjuntos.

Además, se identificarán los símbolos de pertenencia (o no pertenencia) y de subconjuntos (o de no subconjuntos).

El capítulo contendrá las siguientes secciones:

- 1.1 Definición de conjunto
- 1.2 Conjuntos numéricos
- 1.3 Pertenencia o no pertenencia de un elemento a un conjunto
- 1.4 Subconjuntos y no subconjuntos de un conjunto

1.1 Definición de conjunto

Definición 1.1 Conjunto

Un **conjunto** es una colección de objetos, a los cuales se les llama **elementos**. En caso de que los elementos sean números, entonces, al conjunto se le denomina **conjunto numérico**.

En este texto, se trabajará con conjuntos numéricos.

Los conjuntos pueden ser **finitos**, en caso de tener un número finito de elementos, **infinitos**, en caso de no ser finitos y **vacíos**, en caso de ser un conjunto finito de 0 elementos, en este caso se denota $\{\}$, o bien, \emptyset .

Los conjuntos usualmente **se designan utilizando una letra mayúscula** cualquiera de nuestro alfabeto, seguida del símbolo “=” y anotando los elementos del conjunto entre llaves y separados por comas. Para denotarlos se acostumbra de dos formas diferentes:

- Notación por extensión:

Presenta la lista de los elementos del conjunto encerrada entre llaves y separados por comas. En caso de ser una lista muy grande o infinita, se escriben los primeros elementos y se agregan puntos suspensivos, para indicar que los demás elementos siguen la secuencia.

- Notación por comprensión:

Entre llaves se expone la propiedad o propiedades que describen a los elementos del conjunto.

Ejemplo 1.1

El conjunto de los números primos es un conjunto numérico y puede denotarse por **extensión** de la siguiente manera:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}.$$

Ejemplo 1.2

El conjunto de los números compuestos menores que 10, es un conjunto numérico y puede denotarse por **comprensión** de la siguiente manera:

$$A = \{x/x \text{ es un número compuesto menor que } 10\}.$$

Note que, en el ejemplo anterior, se utilizó el símbolo “/” el cual se lee “tal que”.

1.2 Conjuntos numéricos

Conjunto de los Números Naturales

Se considera el primer conjunto numérico que existió, estos números surgieron como resultado de la acción de **contar** del hombre.

Simbólicamente se denota con el símbolo \mathbb{N} y los elementos que lo componen se denominan **números naturales**. Por extensión se representa de la siguiente manera:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$$

En la educación secundaria costarricense, en el Conjunto de los Números Naturales se contempla el número cero. Por extensión se puede representar de la siguiente manera:

$$\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$$

En adelante, se considera el Conjunto de los Números Naturales de la forma \mathbb{N} .

Conjunto de los Números Enteros

Este conjunto resulta como una consecuencia de ampliar \mathbb{N} , esto con la intención de obtener un conjunto en donde la **sustracción** sea siempre posible de realizar, esto porque operaciones como $2 - 5$ en \mathbb{N} no eran posible resolverse.

Simbólicamente se denota con el símbolo \mathbb{Z} y los elementos que lo componen se denominan **números enteros**. Por extensión se representa de la siguiente manera:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Conjunto de los Números Racionales

Este conjunto resulta al ampliar el conjunto \mathbb{Z} , esto con la intención de obtener un conjunto en donde la **división** entre un número que no sea cero sea siempre realizable, esto porque operaciones como $4 \div 7$ en el conjunto \mathbb{Z} no eran posible realizar.

Simbólicamente se denota con el símbolo \mathbb{Q} y los elementos que lo componen se denominan **números racionales**. Por comprensión se representa de la siguiente manera:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

La anterior representación significa que los números racionales **siempre** se pueden expresar como una fracción con numerador y denominador entero, siempre y cuando, el denominador sea diferente de cero.

Conjunto de los Números Irracionales

La medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos midieran una unidad no puede expresarse como un número racional, la existencia de longitudes que no podían expresarse como un número racional, llevó al descubrimiento de los números irracionales.

Estos números poseen expansión decimal infinita y no periódica. Simbólicamente se denota con el símbolo \mathbb{I} y los elementos que lo componen se denominan **números irracionales**.

Conjunto de los Números Reales

Es el conjunto formado por los números racionales y los números irracionales.

Simbólicamente se denota con el símbolo \mathbb{R} y los elementos que lo componen se denominan **números reales**.

Ejemplo 1.3

Son ejemplos de números racionales:

$$3 = \frac{3}{1}$$

$$1,25 = \frac{5}{4}$$

$$4,2222\dots = 4,\bar{2} = \frac{38}{9}$$

Note que en la expresión $4,2222\dots$ se utilizan los puntos suspensivos para indicar que los decimales continúan infinitamente.

Ejemplo 1.4

Son ejemplos de números irracionales:

$$\pi = 3,14159\dots \text{ (número pi)}$$

$$e = 2,71828\dots \text{ (constante de Euler)}$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots \text{ (número áureo)}$$

1.3 Pertenencia o no pertenencia de un elemento a un conjunto

Para indicar la **pertenencia** de un **elemento** a un **conjunto** se utiliza el símbolo \in .

Para indicar la **no pertenencia** de un **elemento** a un **conjunto** se utiliza el símbolo \notin .

Ejemplo 1.5

$\frac{7}{4} \in \mathbb{Q}$ y se lee “ $\frac{7}{4}$ **pertenece** al Conjunto de los Números Racionales”.

$-5 \in \mathbb{Z}$ y se lee “ -5 **pertenece** al Conjunto de los Números Enteros”.

Ejemplo 1.6

$\frac{2\pi}{7} \notin \mathbb{Q}$ y se lee “ $\frac{2\pi}{7}$ **no pertenece** al Conjunto de los Números Racionales”. Note que el numerador no es un número entero.

$-5 \notin \mathbb{N}$ y se lee “ -5 **no pertenece** al Conjunto de los Números Naturales”.

1.4 Subconjuntos y no subconjuntos de un conjunto

Para indicar que un conjunto A es **subconjunto** de un conjunto B debe cumplirse que **todos los elementos** de A son también elementos de B y se denota “ $A \subset B$ ”.

En caso de existir al menos un elemento del conjunto A que no pertenezca al conjunto B se dice que A **no es subconjunto** de B y se denota “ $A \not\subset B$ ”.

Si $A = B$ se cumple que $A \subset B$ y $B \subset A$.

Ejemplo 1.7

$\{-3, -2, -1, 0\} \subset \mathbb{Z}$ y se lee “ $\{-3, -2, -1, 0\}$ **es subconjunto** del Conjunto de los Números Enteros”.

$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ y se lee “ \mathbb{I} **es subconjunto** del Conjunto de los Números Reales”.

Ejemplo 1.8

$\{-3, -2, -1, 0\} \not\subset \mathbb{N}$ y se lee “ $\{-3, -2, -1, 0\}$ **no es subconjunto** del Conjunto de los Números Naturales”.

$\mathbb{I} \not\subset \mathbb{Q}$ y se lee “ \mathbb{I} **no es subconjunto** del Conjunto de los Números Racionales”.

Ejercicios 1.1

1. Denote por extensión los siguientes conjuntos:

- a) El conjunto de números naturales mayores a 100 pero menores que 111.
- b) El conjunto de números pares.

2. Denote por comprensión los siguientes conjuntos:

- a) El conjunto de números enteros menores o iguales a 50.
- b) El conjunto de múltiplos de 3.

3. Escriba sobre la línea el símbolo \in o \notin según corresponda:

- a) 3 _____ \mathbb{I}
- b) $\frac{2}{4}$ _____ \mathbb{R}
- c) e _____ \mathbb{Q}
- d) $\pi - 3$ _____ \mathbb{I}
- e) -5 _____ \mathbb{Z}
- f) 2π _____ \mathbb{Z}

4. Escriba sobre la línea el símbolo \subset o $\not\subset$ según corresponda:

- a) \mathbb{Z} _____ \mathbb{N}
- b) $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ _____ \mathbb{Q}
- c) $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots\}$ _____ \mathbb{I}
- d) \mathbb{Q} _____ \mathbb{I}
- e) \mathbb{N} _____ \mathbb{Z}
- f) $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ _____ \mathbb{R}

2 — Recta Real

La **recta real** también llamada **recta numérica** es un gráfico de una dimensión que permite ubicar los números reales.

Por medio de una correspondencia biunívoca, es decir, unívoca y recíproca, se hacen corresponder dos conjuntos infinitos: el conjunto de puntos de una recta y el Conjunto de los Números Reales.

En la recta real, a cada punto le corresponde un número real único y a cada número real le corresponde un único punto en la recta.

Propiedades de los números reales como: la completitud, la densidad y el orden pueden ser estudiadas en la recta numérica.

El capítulo contendrá las siguientes secciones:

2.1 Representar números en la recta real

2.2 Intervalos

2.1 Representar números en la recta real

En secundaria se trabaja el **concepto primitivo** de **recta**, y se considera esta como una línea recta que se extiende infinitamente en ambos extremos.

Se puede hacer corresponder a cada punto de la recta con un único número real y a cada número real con un único punto de la recta. Dicha correspondencia puede realizarse de la siguiente manera:

Se toma un punto cualquiera de la recta y se le hace corresponder con el número cero.

Luego, considerando una distancia arbitraria denominada **unidad**, se hacen marcas al lado derecho y al lado izquierdo del punto que le corresponde al número cero. De esta forma se pueden representar los números enteros positivos al lado derecho del cero y los números enteros negativos al lado izquierdo del cero como se expone en la siguiente figura.

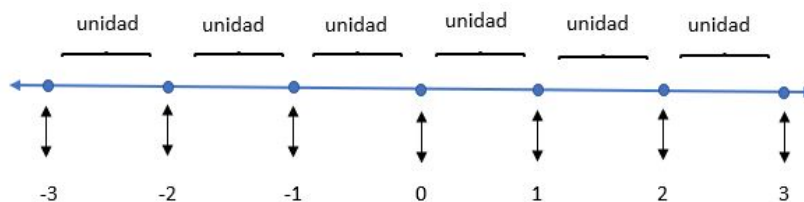


Figura 2.1: Ejemplo de recta numérica

Para ubicar números racionales en la recta numérica, se pueden expresar los números en notación decimal y posteriormente ubicarlos en la recta, aproximándolos ya sea con uno, dos o más decimales, según se considere. Para ello, deberá ubicar la parte entera del número racional según lo explicado anteriormente, y luego, para ubicar la parte decimal, se debería dividir la unidad inmediata en 10 partes iguales para así poder ubicar el primer decimal del número racional, en caso de aproximar con dos decimales, la unidad deberá dividirse en 100 partes iguales y así sucesivamente según la cantidad de decimales.

Si se quiere una ubicación en la recta real considerando la representación fraccionaria del número racional, se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- **Fracción propia:** Hay que ubicarse en cero y dividir la unidad inmediata de la derecha o de la izquierda (según sea positivo o negativo el número) en segmentos iguales, tantos como lo indique el denominador, y se ubica la fracción en la parte según lo indique el numerador.
- **Fracción impropia:** Se representa la fracción como un numeral mixto, luego, se ubica la parte entera en la recta numérica, y la parte fraccionaria se ubica considerando el caso anterior.

La ubicación de números irracionales se puede realizar por aproximación, es decir, considerando el número irracional en forma decimal y luego ubicarlo según la cantidad de decimales que se considere. También, se pueden ubicar, utilizando técnicas como la utilización del Teorema de Pitágoras (ver ejemplo 2.3).

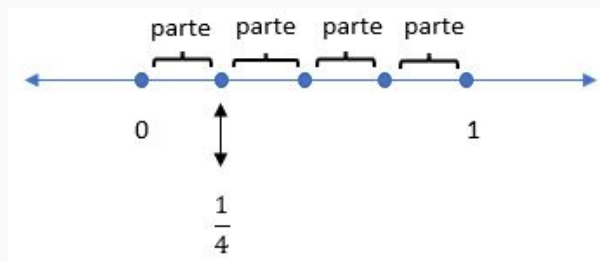
Ejemplo 2.1

Representar en la recta real el número $\frac{1}{4}$.

Solución

$$\frac{1}{4} = 0,25.$$

Entonces, primero se ubica el número 0 en la recta numérica, luego, se divide la unidad inmediata en 4 partes iguales (porque 4 es el denominador) y ubicamos la fracción en la primera parte, dado que el numerador es 1.

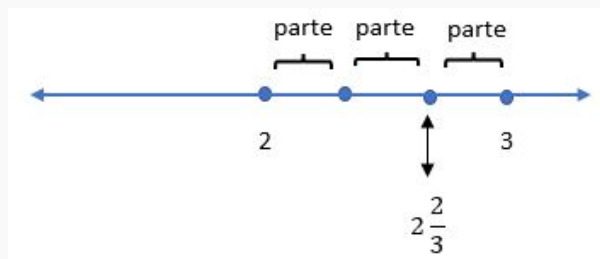
**Ejemplo 2.2**

Representar en la recta real el número $\frac{8}{3}$.

Solución

$$\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Entonces, primero se ubica la parte entera 2 en la recta numérica, luego, se divide la unidad inmediata en 3 partes iguales (porque 3 es el denominador de la parte fraccionaria) y ubicamos la fracción en la segunda parte, dado que el numerador de la parte fraccionaria es 2.



Ejemplo 2.3

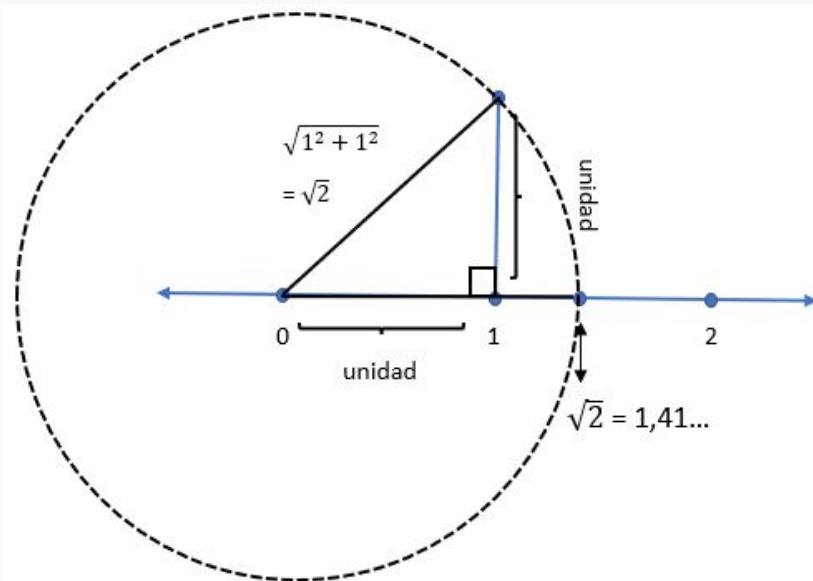
Representar en la recta real el número $\sqrt{2}$.

Solución

Se construye un triángulo rectángulo cuyos catetos midan una unidad. Por el Teorema de Pitágoras, se tiene que, la hipotenusa de ese triángulo mide $\sqrt{2}$ unidades.

Luego, utilizando un compás, con centro en el punto de la recta que le corresponde el número 0 y con radio $\sqrt{2}$ unidades, se traza una circunferencia.

Esta circunferencia interseca la recta en dos puntos, el punto a la derecha de cero le corresponde el valor de $\sqrt{2}$ unidades en la recta real.



2.2 Intervalos

Definición 2.1 Intervalo

Un intervalo I es un subconjunto de \mathbb{R} que cumple la siguiente propiedad:

Si a y b son elementos de I con $a \leq b$, entonces para todo $u \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq u \leq b$, se cumple que $u \in I$.

A continuación, una tabla en donde se expone el nombre del intervalo y las notaciones simbólica, comprensión y gráfica:

Nombre del intervalo	Notación simbólica	Notación por comprensión	Notación gráfica
Abierto	$]a, b[$	$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$	
Cerrado	$[a, b]$	$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$	
Semiabierto	$]a, b]$	$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\}$	
Semiabierto	$[a, b[$	$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b\}$	
Infinito	$]a, +\infty[$	$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x > a\}$	
Infinito	$[a, +\infty[$	$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geq a\}$	
Infinito	$] -\infty, a]$	$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \leq a\}$	
Infinito	$] -\infty, a[$	$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < a\}$	
Infinito	$] -\infty, +\infty[$	$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -\infty < x < +\infty\}$	

Cuadro 2.1: Intervalos

En la columna referente a la notación por comprensión se utiliza el símbolo “ \wedge ” el cual se lee “y”.

Ejercicios 2.1


1. Represente en la recta real los siguientes números:

a) $\frac{3}{7}$

b) $\frac{4}{3}$

c) $\sqrt{3}$

2. Complete la siguiente tabla según corresponda:

Nombre del intervalo	Notación simbólica	Notación por comprensión	Notación gráfica
		$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -2 < x < 3\}$	
			
	$[4, +\infty[$		
		$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 0\}$	

3 — Relaciones de orden en \mathbb{R}

Una de las características del Conjunto de los Números Reales es que es un **conjunto ordenado**.

Sin mayor generalidad y sin profundizar en el tema de las relaciones, se dice que \mathbb{R} es **un conjunto ordenado** porque en dicho conjunto se puede establecer una relación que cumple las propiedades: **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**, esto básicamente significa **que dos elementos de dicho conjunto siempre podrán compararse mediante dicha relación**.

Este capítulo abarcará las siguientes secciones:

3.1 Noción de orden en \mathbb{R}

3.2 Los símbolos $<$, $>$, $=$, \leq , \geq

3.1 Noción de orden en \mathbb{R}

Considerando la recta real:

- Si a está a la **izquierda** de b se lee “ a es menor que b ” y se escribe $a < b$.
- Si a está a la **derecha** de b se lee “ a es mayor que b ” y se escribe $a > b$.
- Si a está en la misma posición que b se lee “ a es igual que b ” y se escribe $a = b$.
- Para indicar que a es menor o igual que b se escribe $a \leq b$.
- Para indicar que a es mayor o igual que b se escribe $a \geq b$.

Definición 3.1 Ley de Tricotomía

Considere a y b números reales. Entonces se cumple **una y solo una** de las siguientes condiciones:

- $a < b$.
- $a > b$.
- $a = b$.

3.2 Los símbolos $\leq, <, \geq, >$

Definición 3.2 Menor o igual que, menor que, mayor o igual que, mayor que

Considere a y b números reales. Entonces:

- $a \leq b$ si se cumple que $b - a \geq 0$.
- $a < b$ si se cumple que $b - a > 0$.
- $a \geq b$ si se cumple que $b - a \leq 0$.
- $a > b$ si se cumple que $b - a < 0$.

Ejemplo 3.1

- $-4 < -1$
- $\frac{4}{3} > 0$
- $\frac{-e}{3} = -0,9060\dots$
- $2e > \pi$
- $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$

Ejercicios 3.1

1. Escriba sobre la línea el símbolo $<, >$ o $=$ según corresponda:

a) 3 _____ $\sqrt{3}$

f) $\pi - e$ _____ $e - \pi$

b) $\frac{2}{4}$ _____ $\frac{2}{5}$

g) $0,456$ _____ $0,4561$

c) e _____ $2,718281\dots$

h) -101 _____ -100

d) $\pi - 3$ _____ 1

i) $\frac{2}{7}$ _____ $\frac{4}{14}$

e) -5 _____ -6

j) $\sqrt{5}$ _____ $\sqrt{6}$

4 — Valor absoluto

En el Conjunto de los Números Reales hay números positivos y también negativos, sin embargo, en el campo de las matemáticas hay situaciones en donde el signo no es relevante y por ende se trabaja únicamente con números positivos.

El concepto de valor absoluto está presente en diversos contextos de la Física y las Matemáticas, por ejemplo en las nociones de **magnitud**, **distancia**, y **norma**.

En este capítulo se brindará la definición de valor absoluto de un número real, para posteriormente, definir la distancia entre puntos en la recta numérica.

Este capítulo abarca la siguiente sección:

4.1 Valor absoluto

4.1 Valor absoluto

Definición 4.1 Valor absoluto

El **valor absoluto** o **módulo** de un número real x se define de la siguiente forma:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El **valor absoluto** de un número, corresponde al valor del número sin considerar su signo, **siempre** es un número mayor o igual que 0.

Definición 4.2 Distancia entre puntos

La distancia entre dos puntos dados corresponde al valor absoluto de la diferencia de los números reales que le corresponden en la recta real.

Ejemplo 4.1

1. $|-20| = 20$
2. $|20| = 20$
3. $|0| = 0$
4. $|-10 - 5| = |-15| = 15$
5. $|e| = e$



Videos con ejemplos resueltos

Escanee el código QR, haga clic en la imagen o ingrese a www.uned.cr/qr/mUCzpIS84

Ejemplo 4.2

Si en la recta real se tienen dos puntos A y B y a estos puntos le corresponden los números reales -45 y 50 respectivamente, hallar la distancia que hay del punto A al punto B .

Solución

$$AB = |50 - (-45)| = |50 + 45| = |95| = 95$$

La distancia que hay del punto A al punto B corresponde a 95 unidades.

Ejercicios 4.1

1. Hallar el valor absoluto de los siguientes números:

a) $|-e| = \underline{\hspace{2cm}}$

f) $|15 - 20| = \underline{\hspace{2cm}}$

b) $|1 - 20| = \underline{\hspace{2cm}}$

g) $|-1| = \underline{\hspace{2cm}}$

c) $|\pi - 2\pi| = \underline{\hspace{2cm}}$

h) $\left|1 - \frac{1}{2}\right| = \underline{\hspace{2cm}}$

d) $|4| = \underline{\hspace{2cm}}$

i) $|-20| = \underline{\hspace{2cm}}$

e) $|0| = \underline{\hspace{2cm}}$

j) $\left|\frac{-1}{2}\right| = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Si en la recta real se tienen dos puntos P y Q y a estos puntos le corresponden los números reales -25 y 25 respectivamente, hallar la distancia que hay del punto P al punto Q .

5 — Operaciones con números irracionales

Este capítulo se enfatiza en las operaciones: suma, resta, multiplicación y división de números irracionales, advirtiendo que, estas operaciones no son bien definidas en \mathbb{I} , lo que quiere decir que al resolver dichas operaciones no necesariamente se obtiene por resultado otro número irracional.

Este capítulo abarcará las siguientes secciones:

- 5.1 Leyes de potencias
- 5.2 Suma y resta de números irracionales
- 5.3 Multiplicación y división de números irracionales
- 5.4 Operaciones combinadas de números irracionales

5.1 Leyes de potencias

Definición 5.1 Potencia

Para todo número real a y n número entero positivo, se define la n - **ésima potencia** de a de la siguiente manera:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-veces}}$$

Leyes de potencias

1. $a^1 = a$
2. $a^0 = 1, a \neq 0$
3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$
4. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
5. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$
6. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
8. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Ejemplo 5.1

1. $3^1 = 3$
2. $(-6)^0 = 1$
3. $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$
4. $(-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^{3+4}$
 $= (-2)^7 = -128$
5. $\frac{7^5}{7^2} = 7^{5-2} = 7^3 = 343$
6. $(-3 \cdot 4)^2 = (-3)^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144$
7. $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5} = \frac{243}{1024}$
8. $(10^2)^3 = 10^{2 \cdot 3} = 10^6 = 1\,000\,000$

5.2 Suma y resta de números irracionales

Cuando se suman o restan números irracionales expresados en forma radical y semejantes (mismo índice y mismo subradical), se suman o se restan los coeficientes según corresponda, y las raíces se mantienen como están.

Ejemplo 5.2

Resuelva la siguiente operación con números irracionales:

$$5\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$$

Solución

$$= (5 - 2 + 3)\sqrt{7}$$

$$= 6\sqrt{7}$$

Ejemplo 5.3

Resuelva la siguiente operación con números irracionales:

$$-2\sqrt{5} + 7\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$$

Solución

$$= (-2 + 3)\sqrt{5} + 7\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{5} + 7\sqrt{2}$$

Ejemplo 5.4

Resuelva la siguiente operación con números irracionales:

$$2\sqrt{12} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{27}$$

Solución

En este caso, primero se simplifican los radicales para verificar si hay radicales semejantes y proceder como los ejemplos anteriores.

$$= 2\sqrt{2^2 \cdot 3} - 2\sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3} + 3\sqrt{3^2 \cdot 3}$$

$$= 2 \cdot 2\sqrt{3} - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} + 3 \cdot 3\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 9\sqrt{3}$$

$$= (4 - 8 + 9)\sqrt{3}$$

$$= 5\sqrt{3}$$

5.3 Multiplicación y división de números irracionales

Considerando las raíces $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ definidas en \mathbb{R} , se cumple lo siguiente:

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, con $b \neq 0$.

Ejemplo 5.5

Resuelva la siguiente multiplicación con números irracionales:

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$$

Solución

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \cdot 16} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 2^4} = \sqrt[3]{2^{2+4}} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} = 2 \cdot 2 = 4$$

Recuerde que:

	n es impar	n es par
$a \geq 0$	$\sqrt[n]{a^n} = a$	$\sqrt[n]{a^n} = a$
$a < 0$	$\sqrt[n]{a^n} = a$	$\sqrt[n]{a^n} = a $

Cuadro 5.1: Raíz n -ésima de una potencia n -ésima

Ejemplo 5.6

Resuelva la siguiente división con números irracionales:

$$\frac{\sqrt[5]{1024}}{\sqrt[5]{32}}$$

Solución

$$\frac{\sqrt[5]{1024}}{\sqrt[5]{32}} = \sqrt[5]{\frac{1024}{32}} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

Para multiplicar o dividir radicales según lo visto anteriormente, estas deben tener el mismo índice (homogéneos), en caso de tener diferente índice, hay que modificar el índice y el exponente del radicando sin que el resultado de la raíz varíe, como se realiza en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.7

Resuelva la siguiente multiplicación con números irracionales:

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}$$

Solución

Como los radicales a multiplicar no son homogéneos, entonces, hay que averiguar el mínimo común múltiplo de los índices 2 y 3.

$$\text{mcm}(2,3) = 6$$

Luego, se procede a homogenizar las raíces, es decir, hallar dos raíces equivalentes a las dadas, pero que posean el mismo índice.

Para ello, se multiplica el índice de cada una por un número conveniente, tal que la multiplicación dé por resultado el mínimo común múltiplo hallado anteriormente, no obstante, el radicando debe elevarse a ese mismo número, esto con la intención de que el resultado de la raíz no sea afectado.

Este proceso debe hacerse con las dos raíces.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} &= \sqrt[3]{3^1} \cdot \sqrt{2^1} \\ &= \sqrt[3 \cdot 2]{3^{1 \cdot 2}} \cdot \sqrt[2 \cdot 3]{2^{1 \cdot 3}} \\ &= \sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} \end{aligned}$$

Una vez que las raíces tengan el mismo índice, se procede como en los ejemplo 5.5.

$$= \sqrt[6]{3^2 \cdot 2^3} = \sqrt[6]{9 \cdot 8} = \sqrt[6]{72}$$

5.4 Operaciones combinadas de números irracionales

Para resolver una operación de combinaciones en \mathbb{I} hay que tener en cuenta la jerarquía de operaciones matemáticas:

- Multiplicaciones o divisiones

- Sumas o restas

En caso de existir dos operaciones con la misma jerarquía se resuelve la que primero aparezca de izquierda a derecha y si hay signos de agrupación se resuelven los de adentro en primera instancia, es decir, de adentro hacia afuera.

Ejemplo 5.8

Resuelva la siguiente operación con números irracionales:

$$\frac{5}{17} \left[3\sqrt{32} \div (2\sqrt{2} + \sqrt{18}) \right]$$

Solución

$$= \frac{5}{17} \left[3\sqrt{2^5} \div (2\sqrt{2} + \sqrt{3^2 \cdot 2}) \right]$$

$$= \frac{5}{17} \left[3\sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} \div (2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) \right]$$

$$= \frac{5}{17} \left[3 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \div 5\sqrt{2} \right]$$

$$= \frac{5}{17} \left[12\sqrt{2} \div 5\sqrt{2} \right]$$

$$= \frac{5}{17} \left[\frac{12}{5} \right]$$

$$= \frac{5 \cdot 12}{17 \cdot 5}$$

$$= \frac{12}{17}$$

Ejercicios 5.1

1. Escriba sobre la línea el resultado correcto:

$$a) 100^0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b) 5^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$c) (7)^{-3} \cdot (7)^4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$d) \frac{(-3)^6}{(-3)^5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$e) (2 \cdot -5)^5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f) (1^2)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. Resuelva la siguiente operación con números irracionales:

$$\sqrt{18} - \sqrt{2} + 2\sqrt{50}$$

3. Resuelva la siguiente multiplicación y división de números irracionales:

$$\blacksquare \sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{3125}$$

$$\blacksquare \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{1331}}$$

4. Resuelva la siguiente combinación de operaciones de números irracionales:

$$\left(\sqrt{50} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{32}\right) \div \sqrt{2}$$

6 — Racionalización de radicales

Las expresiones numéricas fraccionarias en donde aparezcan radicales en el numerador o en el denominador se pueden reescribir, a partir de una manipulación numérica para que no aparezcan radicales en el numerador o en el denominador según corresponda. Dicho proceso recibe el nombre de **racionalización**.

Este capítulo abarcará las siguientes dos secciones:

- 6.1 Racionalización del numerador
- 6.2 Racionalización del denominador

6.1 Racionalización del numerador

Racionalizar el numerador consiste en: reescribir una expresión numérica que posee radicales en el numerador, en otra expresión numérica equivalente, que no posea radicales en el numerador.

Ejemplo 6.1

Racionalice el numerador en la siguiente expresión $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

Solución

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{3} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2 \cdot 2}}{3 \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2 \cdot 2}}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^{2+1}}}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^3}}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$$

6.2 Racionalización del denominador

Racionalizar el denominador consiste en: reescribir una expresión numérica que posee radicales en el denominador, en otra expresión numérica equivalente, que no posea radicales en el denominador.

Ejemplo 6.2

Racionalice el denominador de la expresión $\frac{7}{\sqrt[4]{3}}$.

Solución

$$\frac{7}{\sqrt[4]{3}} = \frac{7}{\sqrt[4]{3}} \cdot 1 = \frac{7}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}} = \frac{7 \cdot \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3}} = \frac{7\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3 \cdot 3^3}} = \frac{7\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^{1+3}}} = \frac{7\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{7\sqrt[4]{27}}{3}$$



Videos con ejemplos resueltos

Escanee el código QR, haga clic en la imagen o ingrese a www.uned.cr/qr/eaBKBEbuGe

Ejercicios 6.1

1. En las siguientes expresiones racionalice el numerador:

a) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

b) $\frac{\sqrt[3]{2^2}}{6}$

2. En las siguientes expresiones racionalice el denominador:

a) $\frac{-2}{\sqrt{5}}$

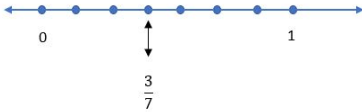
b) $\frac{1}{\sqrt[4]{25}}$

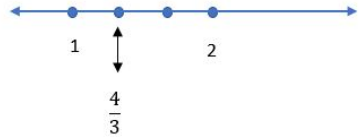
7 — Soluciones de los ejercicios

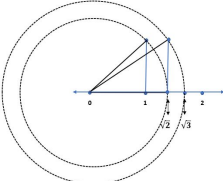
Soluciones del Capítulo 1

1. a) $\{101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110\}$
b) $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
2. a) $\{x/x \in \mathbb{Z}, x \leq 50\}$.
b) $\{x/x \in \mathbb{N}, x = 3n; n \in \mathbb{N}\}$.
3. a) $3 \notin \mathbb{I}$
b) $\frac{2}{4} \in \mathbb{R}$
c) $e \notin \mathbb{Q}$
d) $\pi - 3 \in \mathbb{I}$
e) $-5 \in \mathbb{Z}$
f) $2\pi \notin \mathbb{Z}$
4. a) $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$
b) $\{1, 2, 3, 4, \dots\} \subset \mathbb{Q}$
c) $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots\} \not\subset \mathbb{I}$
d) $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{I}$
e) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
f) $\{-1, -2, -3, -4, \dots\} \subset \mathbb{R}$

Soluciones del Capítulo 2

1. a) 

A horizontal number line with arrows at both ends. It has tick marks at 0 and 1. A vertical double-headed arrow points from the line down to the fraction $\frac{3}{7}$, indicating a tick mark at that position.
- b) 

A horizontal number line with arrows at both ends. It has tick marks at 1 and 2. A vertical double-headed arrow points from the line down to the fraction $\frac{4}{3}$, indicating a tick mark at that position.
- c) 

A horizontal number line with arrows at both ends. It has tick marks at 0, 1, and 2. A vertical double-headed arrow points from the line down to the fraction $\frac{2}{3}$, indicating a tick mark at that position. The number line is enclosed within two concentric circles.

2.

Nombre del intervalo	Notación simbólica	Notación por comprensión	Notación gráfica
Abierto	$] - 2, 3[$	$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -2 < x < 3\}$	
Semiabierto	$[-3, -2[$	$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -3 \leq x < -2\}$	
Infinito	$[4, +\infty[$	$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 4\}$	
Infinito	$] - \infty, 0]$	$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 0\}$	

Soluciones del Capítulo 3

1. a) $3 > \sqrt{3}$
- b) $\frac{2}{4} > \frac{2}{5}$
- c) $e = 2,718281\dots$
- d) $\pi - 3 < 1$
- e) $-5 > -6$
- f) $\pi - e > e - \pi$
- g) $0,456 < 0,4561$
- h) $-101 < -100$
- i) $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$
- j) $\sqrt{5} < \sqrt{6}$

Soluciones del Capítulo 4

1. a) $|-e| = e$
 - b) $|1 - 20| = 19$
 - c) $|\pi - 2\pi| = \pi$
 - d) $|4| = 4$
 - e) $|0| = 0$
 - f) $|15 - 20| = 5$
 - g) $|-1| = 1$
 - h) $\left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$
 - i) $|-20| = 20$
 - j) $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$
2. $PQ = 50$ unidades.

Soluciones del Capítulo 5

1. a) $100^0 = 1$
 - b) $5^{-3} = \frac{1}{125}$
 - c) $(7)^{-3} \cdot (7)^4 = 7$
 - d) $\frac{(-3)^6}{(-3)^5} = -3$
 - e) $(2 \cdot -5)^5 = -100000$
 - f) $(1^2)^3 = 1$
2. $12\sqrt{2}$
3. a) $5\sqrt[5]{5}$
 - b) $\frac{10}{11}$
4. 13

Soluciones del Capítulo 6

1. a) $\frac{7}{4\sqrt{7}}$
 - b) $\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}$
2. a) $\frac{-2\sqrt{5}}{5}$
 - b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Bibliografía

- [1] Murillo, M. (2018). *Introducción a la Matemática Discreta*. Editorial Tecnológica de Costa Rica.
- [2] Padilla, E., Quesada, C. y Araya, D. (2021). *PreCálculo*. Editorial Universidad Estatal a Distancia.
- [3] Rojas, E. y Sequeira, R. (2012). *Geometría Euclídea I*. Editorial Universidad Estatal a Distancia.
- [4] Vargas, G. (1981). *Matemáticas Básicas Matemáticas I*. Editorial Universidad Estatal a Distancia.